Вопросы и ответы к зачету по математическому анализу 2 курс 3 семестр(207)

1. Определение сходимости числового ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \to \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S. \text{Если предел существует, то } S \text{ называют суммой числового ряда}$$

2. Критерий Коши сходимости числового ряда (необходимое условие сходимости).

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \to \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon, S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k - \text{частичная сумма ряда}$$

$$\text{Следствие(необходимое условие сходимости)}: \sum_{k=1}^{\infty} u_k \to \Rightarrow \lim_{k\to\infty} u_k = 0$$

3. Признаки сравнения сходимости числовых рядов (общий и частный).

Общий признак: Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k -$ два числовых ряда и $0 \le p_k \le q_k (\forall k \ge k_0)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k \to \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \to$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \nrightarrow \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} q_k \nrightarrow$$

Частный признак: Пусть $p_k = O^*\left(\frac{1}{k^\alpha}\right), k \to \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \begin{matrix} \to & \alpha > 1 \\ \nrightarrow & \alpha \le 1 \end{matrix}$

4. Признак Даламбера сходимости числовых рядов.

$$p_k > 0\ \exists \lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = q \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \begin{matrix} \to q < 1 \\ \nrightarrow q > 1 \end{matrix}$$

5. Признак Коши сходимости числовых рядов.

$$p_k \ge 0\ \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = q \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \begin{matrix} \to q < 1 \\ \nrightarrow q > 1 \end{matrix}$$

6. Признак Раабе сходимости числовых рядов.

$$p_k > 0\ \exists \lim_{k\to\infty} k\left(\frac{p_k}{p_{k+1}} - 1\right) = \mu \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \begin{matrix} \to \mu < 1 \\ \nrightarrow \mu > 1 \end{matrix}$$

7. Признак Гаусса сходимости числовых рядов.

$$p_k > 0\ \frac{p_k}{p_{k+1}} = \lambda + \frac{\mu}{k} + \frac{c_k}{k^{1+\varepsilon}}\ |c_k| < M, \varepsilon > 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} p_k \begin{matrix} \to \lambda > 1;\ \lambda = 1, \mu > 1 \\ \nrightarrow \lambda < 1;\ \lambda = 1, \mu \le 1 \end{matrix}$$

8. Интегральный признак Коши-Маклорена сходимости числовых рядов.

$$f(x) \ge 0, f(x) \searrow \forall x \ge n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_n^{\infty} f(x)dx \text{ и } \sum_{k=n}^{\infty} f(k) \begin{matrix} \to \\ \nrightarrow \end{matrix} \text{одновременно}$$

9. Определение абсолютной и условной сходимости числовых рядов.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{абс}}, \text{если } \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \to$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{усл}}, \text{если } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \to, \text{а } \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \nrightarrow$$

10. Теорема Коши о сумме абсолютно сходящегося ряда.

$$\text{Пусть } \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{u_k} - \text{ряд, полученный перестановкой членов ряда } \sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

$$\text{Теорема Коши: Если ряд } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{абс}} V \Rightarrow \forall \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{u_k} \xrightarrow{\text{абс}} V$$

11. Теорема Римана о сумме условно сходящегося ряда.

$$\text{Пусть } \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{u_k} - \text{ряд, полученный перестановкой членов ряда } \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \text{тогда если}$$

$$\text{Теорема Римана: Если ряд } \sum_{k=1}^{\infty} u_k \xrightarrow{\text{усл}} \Rightarrow \forall L \in \mathbb{R}\ \exists \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{u_k} \to L$$

12. Признак Лейбница сходимости числового ряда (оценка остаточного члена).

$$\text{Пусть } p_k \geq 0, p_{k+1} \leq p_k, \lim_{k\to\infty} p_k = 0 \Rightarrow \text{знакочередующийся ряд } \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}p_k \to, \text{причем } |S_n - S| \leq p_{n+1}$$

13. Признак Абеля сходимости числовых рядов.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k \to \\ 2)\{v_k\} - \text{монотонная} \\ 3)\{v_k\} - \text{ ограниченная} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \to$$

14. Признак Дирихле сходимости числовых рядов.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \left|\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right| \leq M \text{ (частичные суммы являются ограниченной последовательностью)} \\ 2)\{v_k\} - \text{монотонная} \\ 3)\{v_k\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \to$$

15. Метод Пуассона-Абеля обобщенного суммирования рядов.

$$\text{Ряд } \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \text{ имеет обобщенную сумму по Пуассону} - \text{Абелю, если } \forall x \in (0,1) \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} \to S(x), \exists \lim_{x\to 1-0} S(x) = S - \text{сумма по Пуассону} - \text{Абелю}$$

16. Метод Чезаро обобщенного суммирования рядов.

$$\text{Ряд } \sum_{k=1}^{\infty} u_k - \text{имеет обобщенную сумму по Чезаро, если } \exists \lim_{n\to\infty} \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n} = S - \text{сумма по Чезаро, где } S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

17. Определение равномерной сходимости функциональной последовательности.

$$f_n(x) \underset{\{x\}}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N, \forall x \in \{x\}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

18. Определение равномерной сходимости функционального ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \underset{\{x\}}{\rightrightarrows} S(x) \Leftrightarrow S_n(x) \underset{\{x\}}{\rightrightarrows} S(x), S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

19. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \underset{\{x\}}{\rightrightarrows} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n > N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in \{x\} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

20. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.

$$\text{Пусть } \exists \sum_{k=1}^{\infty} c_k \to, |u_k(x)| \leq c_k\ \forall x \in \{x\}\ (k = 1,2, \dots) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \underset{\{x\}}{\rightrightarrows}$$

21. Признак Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \underset{\{x\}}{\rightrightarrows} \\ 2)\ v_k(x) - \text{монотонна } \forall\, x \in \{x\} \\ 3)\ v_k(x) - \text{ равномерно ограничена на } \{x\} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\, v_k(x) \underset{\{x\}}{\rightrightarrows}$$

22. Признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов.

$$\left.\begin{array}{l} 1) U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \text{ равномерно ограничены на } \{x\} \\ 2)\ v_k(x) - \text{монотонна } \forall\, x \in \{x\} \\ 3)\ v_k(x) \underset{\{x\}}{\rightrightarrows} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\, v_k(x) \underset{\{x\}}{\rightrightarrows}$$

23. Теорема о пределе равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

$$f_n(x) \underset{\{x\}}{\rightrightarrows} f(x), f_n(x) \in C\{x\}\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \exists \lim_{x\to a} f_n(x)\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ (a \in \{x\}) \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = f(a), \text{причем } f(x) \in C(\{x\})$$

24. Теорема о пределе суммы равномерно сходящегося ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \underset{\{x\}}{\rightrightarrows} S(x), \exists \lim_{x\to a} u_k(x)\ \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} S(x) = \lim_{x\to a} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to a} u_k(x)$$

25. Теорема о почленном дифференцировании равномерно сходящегося ряда.

$$\exists u_k'(x)\ \forall x \in \{x\}\ \forall k \in \mathbb{N}, u_k'(x) \underset{(a,b)}{\rightrightarrows}, \exists x_0 \in (a,b): \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0) \to \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \underset{(a,b)}{\rightrightarrows} S(x), \exists S'(x) \text{ на } (a,b), S'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$$

26. Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} S(x), u_k(x) \in R[a,b]\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx \to, S(x) \in R[a,b], \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx$$

27. Определение степенного ряда. Радиус сходимости.

Функциональный ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, называют степенным рядом.

Число $R \geq 0$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \begin{matrix} \to |x-x_0| < R \\ \nrightarrow |x-x_0| > R \end{matrix}$ называют радиусом сходимости степенного ряда.

28. Теорема Коши-Адамара о радиусе сходимости степенного ряда.

Пусть $L = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{a_k}$ Если $L \neq 0$ и конечно, то $\exists R = \frac{1}{L}$:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \overset{\text{абс}}{\to}$ в интервале $|x-x_0| < R$ и $\nrightarrow$ вне этого интервала ($|x-x_0| > R$). Если $L = +\infty$, то степенной ряд сходится только при $x = x_0$. Если $L = 0$, то степенной ряд $\to$ при $x \in (-\infty; +\infty)$

29. Определение 2-го интеграла.

Пусть Ω — замкнутая ограниченная область с границей Γ площади нуль.
Разобьем область Ω при помощи конечного числа произвольных кривых площади нуль на конечное число замкнутых частичных областей $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$,
$\Delta\Omega_i$ — площадь Ω_i, $P_i(\xi_i, \eta_i)$ — произвольная точка в области Ω_i
$d_i = \sup_{\mu_1,\mu_2 \in \Omega_i} \varphi(\mu_1,\mu_2)$, $L = \max_i d_i$

Опр.: $\iint_\Omega f(x,y)\,d\Omega = \lim_{L\to 0} \sum_i f(\xi_i,\eta_i)\,\Delta\Omega_i$, если этот предел существует и не зависит от выбора точек P_i.

Alternative:

Двойным интегралом от непрерывной функции $f(x,y)$, распространенным на ограниченную замкнутую квадрируемую область Ω, называют число

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \lim_{\substack{max|\Delta x_i| \to 0 \\ max|\Delta y_j| \to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j \text{, где } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

и суммирование распространяется на те значения i и j, для которых $(x_i, y_j) \in \Omega$

30. Теорема о сведении 2-го интеграла к повторному.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{Bmatrix} \Rightarrow \iint_\Omega f(x,y)d\Omega = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\ dy.$$

31. Теорема о замене переменных в 2-ом интеграле.

$$\Omega \xrightarrow[\substack{x=x(u,v) \\ y=y(u,v)}]{} \Omega'$$

Пусть выполнено:
1) Ω, Ω' — замкнуты и ограничены
2) Соответствие взаимнооднозначное
3) $x(u,v), y(u,v) \in C^1(\Omega')$
4) $I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ на Ω

$$\text{Тогда } \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|I|\ du\,dv$$

32. Определение 3-го интеграла.

Пусть V — замкнутая ограниченная кубируемая область в пространстве.
Тогда если существует конечный предел

$$\lim_{\substack{max|\Delta x_i| \to 0 \\ max|\Delta y_j| \to 0 \\ max|\Delta z_k| \to 0}} \sum_i \sum_j \sum_{\substack{k \\ (x_i,y_i,z_k) \in V}} f(u_i, v_j, w_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = I,$$

$$u_i \in [x_i, x_{i-1}], v_j \in [y_j, y], w_k \in [z, z_{k-1}],$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

не зависящий от выбора точек u_i, v_j, w_k, то этот предел называется тройным интегралом функции $f(x,y,z)$

по области V. $\left(I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\, dxdydz \right)$.

33. Теорема о сведении 3-го интеграла к повторному.

$$V: \begin{cases} x_1 \le x \le x_2 \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases} \Rightarrow \iiint\limits_V f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz$$

34. Теорема о замене переменных в 3-ом интеграле.

$$V(x,y,z) \xrightarrow[\substack{x=x(u,v,w) \\ y=y(u,v,w) \\ z=z(u,v,w)}]{} V'(u,v,w)$$

Пусть выполнено:

1) V, V' — замкнуты и ограничены
2) Соответствие взаимно — однозначное
3) $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w) \in C^1_{(V')}$
4) $I = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \ne 0$ в V,

Тогда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)|I|du\,dv\,dw.$$

35. Определение последовательности множеств, монотонно исчерпывающих данное.

Будем говорить, что последовательность $\{D_n\}$ открытых связных множеств монотонно исчерпывает множество D, если:

1) $\forall n\ \overline{D}_n \subset D_{n+1}$;
2) $\bigcup\limits_n D_n = D$.

36. Определение сходимости кратного несобственного интеграла.

Пусть для любой последовательности $\{D_n\}$(все $\overline{D}_n$ — кубируемые множетсва), монотонно исчерпывающей множество D, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{\overline{D}_n} \dots \int f(\overline{x})d\overline{x}$, который не зависит от выбора $\{D_n\}$. Тогда кратный несобственный интеграл $\iint\limits_D \dots \int f(\overline{x})d\overline{x}$ сходится и равен этому пределу.

37. Признак сравнения сходимости кратных несобственных интегралов.

Пусть $0 \le f(\overline{x}) \le g(\overline{x}), \forall \overline{x} \in D$. Тогда из сходимости $\iint\limits_D \dots \int g(\overline{x})d\overline{x}$ следует сходимость $\iint\limits_D \dots \int f(\overline{x})d\overline{x}$. Из расходимости $\iint\limits_D \dots \int f(\overline{x})d\overline{x}$ следует расходимость $\iint\limits_D \dots \int g(\overline{x})d\overline{x}$

38. Связь между абсолютной и условной сходимостью кратных несобственных интегралов.

Пусть $D \subset E^n$. Если $n \ge 2$ то $\iint\limits_D \dots \int f(\overline{x})d\overline{x}$ и $\iint\limits_D \dots \int |f(\overline{x})|d\overline{x}$ сходятся и расходятся одновременно.

39. Частный признак сравнения сходимости кратных несобственных интегралов

Пусть $g(\overline{x}) = |\overline{x}|^{-p}$, где $|\overline{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Тогда

1) Если $D = \{|\overline{x}| > a\}$, то $\iint\limits_D \dots \int f(\overline{x})d\overline{x} \begin{matrix} \to p > n \\ \nrightarrow p \le n \end{matrix}$

2) Если $D = \{|\overline{x}| < a\}$, то $\iint\limits_D \dots \int f(\overline{x})d\overline{x} \begin{matrix} \to p < n \\ \nrightarrow p \ge n \end{matrix}$

40. Определение поверхностного интеграла I рода.

Пусть S — гладкая, двусторонняя, ограниченная поверхность.
Пусть на поверхности S определена функция $f(u)$, которая ограничена на S. Разобьем поверхность S гладкими кривыми на конечное число частей S_i. Пусть Δ — максимальный размер частей S_i. Обозначим σ_i — площадь S_i. Предел $\lim\limits_{\Delta\to 0} \sum\limits_i f(M_i)\, \sigma_i,\ M_i \in S_i$ называется поверхностным интегралом I рода от функции $f(u)$ по поверхности S , если он существует и не зависит от выбора S_i, M_i

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_i f(M_i)\sigma_i = \int_S f(M)dS$$

41. Теорема о сведение поверхностного интеграла I рода к 2-му интегралу.

Пусть функция $f(x,y,z)$ непрерывна на S. Если поверхность S задана в виде:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

$x,y,z \in C'(\Omega)$,

то $\int\limits_S f(M)dS = \iint\limits_{\Omega_{uv}} f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\,dudv$, где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

42. Определение поверхностного интеграла II рода.

Пусть S — гладкая, двусторонняя, ограниченная поверхность.

Функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ определены и ограничены на S.

$\{S_i\}$ — разбиение S гладкими кривыми с диаметром Δ.

$\{M_i\} \in S_i, \overline{n}(M_i) = \{\cos x, \cos y, \cos z\}$

$$\sigma_i - \text{площадь } S_i$$
$$\sigma_x = \sum_i P(M_i)\cos x\,\sigma_i$$
$$\sigma_y = \sum_i Q(M_i)\cos y\,\sigma_i$$
$$\sigma_z = \sum_i R(M_i)\cos z\,\sigma_i$$

Если при $\Delta\to 0$ существуют пределы сумм $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ не зависящие от выбора S_i, M_i, то эти переделы называются поверхностными интегралами II рода

$$\lim_{\Delta\to 0}\sigma_x = \iint\limits_S f(M)\cos x\ dS$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\sigma_y = \iint\limits_S f(M)\cos y\ dS$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\sigma_z = \iint\limits_S f(M)\cos z\ dS$$

$$\overline{a} = (P,Q,R)$$

$\iint\limits_S (\overline{a},\overline{n})\,dS = \iint\limits_S (P\cos x + Q\cos y + R\cos z)dS = \iint\limits_S P\,dxdy + Q\,dxdz + R\,dxdy$ – общий поверхностный интеграл II рода

43. Теорема о сведении поверхностного интеграла II рода к 2-му интегралу.

Пусть поверхноть S задана параметрически: $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v) \in C_{(\Omega)}$.

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

$$\cos x = \pm\frac{A}{L}, \cos y = \pm\frac{B}{L}, \cos z = \pm\frac{C}{L},\ L = \sqrt{A^2+B^2+C^2}, dS = L\,du\,dv$$

$$\iint\limits_S (P\cos y + Q\cos y + R\cos z)\,dS = \pm\iint\limits_{\Omega(u,v)} (\tilde{P}A + \tilde{Q}B + \tilde{R}C)du\,dv, \text{где}$$

$$\tilde{P} = P\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big) = P(u,v)$$
$$\tilde{Q} = Q\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big) = Q(u,v)$$
$$\tilde{R} = R\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big) = R(u,v)$$

44. Определение криволинейного интеграла I рода.

Пусть l — спрямляемая кривая без самопересечений, $\{l_k\}$ — разбиение l, $\Delta = \max\limits_k \Delta l_k$

Функция $f(M)$ — определена и огранчена на l. $M_k \in l_k$

$$\sigma_I = \sum_k f(M)\Delta l_k$$

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma_I$, независимый от выбора l_k и M_k, то этот предел называется криволинейным интегралом I рода $\left(\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma_I = \int\limits_l f(M)dl\right)$

45. Теорема о сведении криволинейного интеграла I рода к определенному интегралу

Пусть кривая l задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},$$

$x, y, z \in C'_{[t_0,T]}, t_0 < T$ $f(M)$ − непрерывна на кривой l. Тогда

$$\int\limits_l f(M)dl = \int\limits_{t_0}^{T} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y(t)\big)^2 + \big(z(t)\big)^2}\,dt$$

46. Определение криволинейного интеграла II рода.

Пусть l − кривая без самопересечения,

Функции $P(M), Q(M), R(M)$ − определены и ограничены на l $\{l_k\}$ − разбиение l, $\Delta = \max\limits_{k} \Delta l_k$, $M_k \in l_k$

$$\sigma_{II} = \sum_k P(M_k)\Delta x_k + Q(M_k)\Delta y_k + R(M_k)\Delta z_k$$

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma_{II}$, независимый от выбора l_kи M_k, то этот предел называется

криволинейным интегралом II рода $\left(\lim\limits_{\Delta\to 0}\sigma_{II} = \int\limits_l P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz\right)$.

47. Теорема о сведение криволинейного интеграла II рода к определенному интегралу.

Пусть кривая l задана параметрически:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $x, y, z \in C'_{[t_0,T]}$, $P(M), Q(M), R(M)$ − непрерывны на кривой l, Тогда

$$\int\limits_l P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{t_0}^{T}\Big(P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\Big)\,dt$$

48. Криволинейный интеграл II рода от полного дифференциала.

Пусть Ω − односвязная область в $\mathbb{R}^3$, $P(M), Q(M), R(M) \in C_{(\Omega)}$, C − некоторый контур в Ω,

$\exists u(M)$: $du = Pdx + Qdy + Rdz$, $M \in \Omega$. Тогда

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(M_2) - u(M_1),$$ где M_1, M_2 − начало и конец контура соответственно.

49. Способ нахождения функции по полному дифференциалу.

Пусть Ω − односвязная область в $\mathbb{R}^3$, $P(M), Q(M), R(M) \in C'_{(\Omega)}$, $\forall M \in \Omega$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$. Тогда $\exists u(M)$: $du = Pdx + Qdy + Rdz$, где $M \in \Omega$.

$$u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y, z)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)dy + \int\limits_{zy_0}^{z} R(x_0, y_0, z)dz \ \ \big((x_0, y_0, z_0) \in \Omega\big)$$

50. Формула Грина.

Пусть S − односвязная, ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $C = \partial S$ − замкнутый контур,

$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \in C'_{S\cup\partial S}$. Тогда справедливо:

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$ − формула Грина.

51. Нахождение площади плоской области с помощью криволинейных интегралов.

Площадь $S = \iint\limits_S dxdy = \oint\limits_C xdy = -\oint\limits_C ydx = \frac{1}{2}\oint\limits_C xdy - ydx$, где $\mathrm{C} = \partial S$

52. Формула Стокса.

Пусть $S = \partial V$ − кусочно − гладкая, двусторонняя, ограниченная поверхность

$\mathrm{C} = \partial S$ − простой, замкнутый кусочно − гладкий контур, $P(M), Q(M), R(M) \in C'_{S\cup\partial S}$,

$\overline{n} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$ − нормаль к поверхности S. Тогда справедливо

$$\oint\limits_{\mathrm{C}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} cos\alpha & cos\beta & cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

53. Формула Остроградского.

Пусть V — ограниченный объем в $\mathbb{R}^3$. $S = \partial V$ — кусочно — гладкая, двусторонняя поверхность, $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — внешняя нормаль к S, $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) \in C'_{V+\partial V}$.

Тогда справедливо

$$\oiint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

54. Определение grad U.

$u(\overline{r}) = u(x,y,z)$ — скалярное поле в $\mathbb{R}^3$

$$grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) \text{ (в декартовой системе координат)}$$

55. Определение div a.

$$\overline{a}(\overline{r}) = (a_x(x,y,z), a_y(x,y,z), a_z(x,y,z)) - \text{ векторное поле в } \mathbb{R}^3$$

$$div\overline{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \text{ (в декартовой системе координат)}$$

56. Определение rot a.

$\overline{a}(\overline{r}) = (a_x(x,y,z), a_y(x,y,z), a_z(x,y,z))$ — векторное поле в $\mathbb{R}^3$

$$rot\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{e}_x & \overline{e}_y & \overline{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \text{ (в декартовой системе координат)}$$

57. Инвариантная форма формулы Стокса.

$\overline{A} = (P,Q,R), d\overline{l} = (dx,dy,dz), \overline{n} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$ — нормаль к S

$$\oint\limits_C (\overline{A}, d\overline{l}) = \iint\limits_S (rot\overline{A}, \overline{n})\, dS$$

58. Инвариантная форма записи формулы Остроградского.

$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — внешняя нормаль к S, $\overline{A} = (P,Q,R)$

$$\oiint\limits_S (\overline{A}, \overline{n})dS = \iiint\limits_V div\overline{A}\ dV$$

59. Условие потенциальности векторного поля.

Поле $\overline{A}$ потенциально $\Leftrightarrow$

$\exists u: \overline{A} = grad\ u \Leftrightarrow$ криволинейный интеграл II рода не зависит от пути интегрирования $\Leftrightarrow rot\overline{A} = 0$

60. Формальные действия с оператором ∇.

Example: $div(u\overline{a}) = (\nabla, u\overline{a}) = (\nabla, u_c\overline{a}) + (\nabla, u\overline{a}_c) = u_c(\nabla, \overline{a}) + (\nabla u, \overline{a}_c) = u\ div\ \overline{a} + \overline{a}\ grad\ u$